Frank, A.U. "Spiele Als Algebra." Paper presented at the 24th International Wittgenstein Symposium, Kirchberg a. Wechsel (12.-18. August 2001) 2001.

SPIELE ALS ALGEBRA

Andrew U. Frank
Department of Geoinformation
Technical University Vienna
frank@geoinfo.tuwien.ac.at

Zusammenfassung

Wittgenstein braucht häufig den Begriff des Spiels, ‚Brettspiel' aber auch ‚Sprachspiel'; ihn beschäftigte die Frage, was den Charakter eines Spieles ausmacht.

Die neuere Mathematik, insbesondere Universale Algebra, erlaubt es, Spiele als Algebren zu sehen. Eine Algebra ist eine mathematische Struktur, bestehend aus einem Träger, einer Anzahl von Operationen und Axiomen; Algebren beschreiben Verhalten ohne auf andere, grundlegendere Definitionen, angewiesen zu sein.

Spiele bestehen aus Operationen der Teilnehmer, die im allgemeinen in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt werden. Spiele mit ihren Regeln lassen sich ohne Zwang als Algebren beschreiben. Spiele sind in sich selber definiert, ohne Verweis auf andere Regeln. Brettspiele lassen sich auch losgelöst von physischen Brettern und Figuren beschreiben – z.B. in einem Schachbuch.

Zwischen Algebren können strukturerhaltende Abbildungen, sog. Iso- und Homomorphismen, definiert werden. Zwischen dem physischen Spiel mit Figuren auf einem Brett und der Beschreibung der Züge in einem Buch besteht ein solcher Homomorphismus. Die Struktur des Spieles, als Algebra verstanden, lässt sich verallgemeinern und es zeigt sich, dass Sprache, als Spiel, die Realität – ebenfalls ein ‚Spiel' - beschreibt; zwischen den sprachlichen Beschreibungen und der Realität bestehen strukturerhaltende Abbildungen.

1 Einleitung

Wittgenstein hat sich über lange Zeit mit dem Begriff ‚Spiel' und den verschiedenen Verwendungen beschäftigt. Er stellt sich z.B. die Frage, was in verschiedenen Verwendungen des Wortes ‚Spiel' das Gemeinsame sei (z.B. Philosophische Untersuchungen (Wittgenstein 1960)).

> 66. Betrachte z.B. einmal die Vorgänge, die wir ‚Spiele' nennen. Ich meine Brettspiele, Kartenspiele, Ballspiel, Kampfspiele usw. Was ist allen diesen gemeinsam? (p. 324)

An anderer Stelle fragt er bezogen auf das Damespiel, was denn das Essentielle des Spieles (den ‚Witz') ausmache und ob die Regel, dass ‚Damen' durch einen zweiten, daraufgelegten Stein markiert werden, zum Spiel gehöre.

> 562. ...Im Damespiel wird deine Dame dadurch gekennzeichnet, dass man zwei Spielsteine aufeinanderlegt. Wird man nun nicht sagen, dass es für das Spiel unwesentlich ist, dass eine Dame aus zwei Steinen besteht? (p. 459)
> 563. Sagen wir: die Bedeutung eines Steines (einer Figur) ist ihre Rolle im Spiel. ... (p. 459)
> 564. Ich bin also geneigt, auch im Spiel zwischen wesentlichen und unwesentlichen Regeln zu unterscheiden. Das Spiel, möchte man sagen, hat nicht nur Regeln, sondern auch einen *Witz*. (p. 459)

Wittgenstein macht auf den Zusammenhang zwischen Sprache und deren Notation und Spiel aufmerksam und weist auf Parallelen beim Erlernen der Wörter einer Sprache und den Regeln eines Spieles hin (Wittgenstein 1960):

> Die Art und Weise, wie die Sprache bezeichnet, spiegelt sich in ihrem Gebrauch wider. (Tagebücher, 11.9.1916, p. 175)
> Die Worte „Das ist der König"... sind nur dann eine Worterklärung, wenn der Lernende schon >weiß, was eine Spielfigur ist<. (Philosophische Untersuchungen, 31, p. 305)

Mit den mathematischen Methoden seiner Zeit – im Wesentlichen Logik, in der Form von Theorien erster Ordnung, wie sie von Whitehead und Russell untersucht worden waren (Whitehead and Russell 1910-1913) - war es Wittgenstein wohl nicht möglich, den Begriff des Spieles schärfer zu fassen. Ich will in diesem Beitrag zeigen, dass mit seither entwickelten Instrumenten der Mathematik – insbesondere der Universalen Algebra (Birkhoff 1945) – ein besserer Zugang möglich ist und dass die Intuition Wittgensteins formal nachvollzogen werden kann. Wittgenstein spricht zwar von ‚struktureller Ähnlichkeit' (Wittgenstein 1960, Tagebücher 23.11.16), sein Begriff von Operationen ist aber noch ein wesentlich speziellerer, näher an den arithmetischen Operationen, als der verallgemeinerte Begriff, den Birkhoff eingeführt hat und der seither besonders von der Informatik (Ehrich *et al.* 1989, Loeckx *et al.* 1996) noch weiter verallgemeinert wurde (vgl. Wittgenstein 1960, Tagebücher 17. und 29.8.16).

Mit den Mitteln der Universalen Algebra gelingt es, die Ähnlichkeit von Spiel und Sprache formal zu belegen und den Bezug als Isomorphismus zu beschreiben. Daraus ergibt sich dann verallgemeinernd auch eine Ähnlichkeit zwischen der Welt (das ‚wirkliche' Spiel) und Sprache.

2 Spiele

Wie Wittgenstein bemerkt hat, ist der Begriff Spiel nicht leicht abgrenzbar; es zeigt, was die neuere Linguistik ‚Prototyp-Effekte' nennt. Rosch (1973; 1978) hat mittels empirischer Untersuchungen gezeigt, dass viele Begriffe keine scharfen Grenzen haben und dass sie konzeptionell um Prototypen – besonders typische Exemplare – organisiert sind. Das trifft für alltägliche Wörter wie ‚Hund' oder ‚Vogel' zu: Deutscher Schäfer ist wohl ein prototypischer Hund, Chihuahua eher ein untypischer, ein Sperling ein typischer Vogel, Pinguin und Strauß eher untypische. Spiel kann auch als Homonym angesehen werden mit zumindest drei wesentlich verschiedenen Bedeutungen, die später analysiert werden.

Für das Folgende wählen wir das auch von Wittgenstein herangezogene Damespiel als Prototyp und zeigen nachher, wie die dabei gemachten Feststellungen auf das gesamte Feld des Begriffes ausgeweitet werden können.

Damespiel

Um ein konkretes Beispiel zu haben, hier eine leicht vereinfachte Beschreibung der Regeln:

> Es wird auf einem Brett mit 32 weißen und 32 schwarzen Feldern gespielt, wobei nur auf den schwarzen Feldern gezogen wird (für jeden Spieler gilt: rechts unten ein weißes Feld). Jeder Spieler hat 12 Steine, zu Beginn in den drei ersten Reihen platziert.
> Beim Ziehen und Schlagen werden die Steine immer nur diagonal vom Ausgangsfeld aus bewegt. Es wird immer nur ein Feld vorgezogen, Zurückziehen ist nicht möglich. Beim Schlagen allerdings kann ein gegnerischer Stein diagonal übersprungen werden, wie dies durch die Anordnung der freien Felder möglich ist. Erreicht ein Stein die achte Reihe, so wird er in eine

Dame umgewandelt. Damen können beim Ziehen diagonal so viele Felder nach vorwärts oder rückwärts ziehen (und auch schlagen), wie dies möglich ist. Auch Damen dürfen nie über einen Stein ihrer eigenen Farbe springen.
Es verliert der Spieler, der keinen Zug mehr ausführen kann (weil er blockiert ist oder keinen Stein mehr besitzt).

3 Formale Beschreibung von Spielen

Wittgenstein hat immer wieder wichtige Aussagen formal mit den zu seiner Zeit gebräuchlichen Methoden der Logik beschrieben, um sich der ihm bewussten Unsicherheit des Ausdruckes natürlicher Sprachen zu entziehen.

Mit der zu seiner Zeit üblichen Prädikatenlogik der ersten Ordnung (Carnap 1958, Tarski 1995), bzw. der darauf aufbauenden Theorien, ist es nicht leicht möglich, Spiele zu beschreiben. Logik der ersten Ordnung kann Zustände beschreiben, nicht aber Veränderungen - als sogenanntes ‚frame problem' bekannt (McCarthy and Hayes 1969). Prädikatenlogik ist zwar prinzipiell ausdrucksstark genug um alles, was formal notiert werden kann, auch darzustellen; die Notation wird aber außerordentlich kompliziert und ist nicht geeignet, um Einsichten zu gewinnen.

Das Wesentliche an einem Spiel ist die Abfolge von Zügen, die je einen Zustand des Spieles in einer reglementierten Art verändern und in einen neuen Zustand überführen. Dazu sind die um die Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelte Theorien der Universalen Algebra geeignet (Birkhoff 1945). Diese gehen auf Arbeiten des 19. Jahrhunderts zurück, zu denen Whitehead mit einem wichtigen Werk, auf das auch die Bezeichnung ‚Universale Algebra' zurückgeht, Wesentliches beigetragen hat (Whitehead 1898). Erst die Verbindung von moderner Mathematik mit den praktischen Anforderungen der Programmierung komplexer Ausschnitte der realen Welt bietet die Abstraktionsebene, mit der Wittgensteins Hinweise formal nachvollzogen werden können (Goguen *et al.* 1975, Guttag *et al.* 1985, Ehrich *et al.* 1989, Loeckx *et al.* 1996).

3.1 Universale Algebra

Algebra als Unterrichtsfach der Mittelschule behandelt die Umformung von Gleichungssystemen. Sie beruht auf Regeln wie

$a + b = b + a$	*kommutatives Gesetz*
$(a+b) + c = a + (b + c)$	*distributives Gesetz*
$a (b + c) = a b + a c$	*distributives Gesetz*

Diese Regeln beschreiben die eigentliche Algebra der reellen Zahlen, für welche die Unbekannten in den Gleichungssystemen stehen (diophantische Gleichungen, bei denen die Unbekannten natürliche Zahlen sind, sind nicht nach einfachen Regeln zu lösen und werden deshalb im Unterricht nur selten diskutiert).

Das Konzept der Algebra der reellen Zahlen kann systematisch aufgebaut werden, indem wir zuerst Zahlen mit nur einer Operation (üblicherweise Addition) und deren Umkehrung (Subtraktion) und einer ausgezeichneten Zahl (Null) definieren, für welche die folgenden Regeln (1) und das kommutative Gesetz gelten:

$$a + 0 = a \qquad (1)$$
$$b - a + a = b$$

Wird eine zweite Operation (üblicherweise Multiplikation) mit einer Umkehrung (Division) mit einer ausgezeichneten Zahl (Eins) eingeführt, so sollen dafür die gleichen Regeln (2), formuliert für die Multiplikation, gelten:

*a * 1 = a* (2)
*(b / a) * a = b* (mit a =/ 0)

und zusätzlich die Regel über die Verbindung der zwei Operationen, die oben als Distributivgesetz angeführt ist.

Die erste Gruppe von Axiomen (1) definiert die natürlichen Zahlen, wie sie landläufig verwendet werden, die zweite Gruppe von Axiomen (2) die reellen Zahlen. Diese Regelsysteme erfassen den ‚Witz' der Zahlen, und gelten unabhängig von der Art der Notation:

III + IV = IV + III (römische Zahlen)
3 + 4 = 4 + 3 (arabische Zahlen)
11 + 100 = 100 + 11 (Binärnotation)

Aus algebraischer Sicht definieren die Axiome je die Eigenschaften von algebraischen Strukturen, nämlich Gruppe und Körper; natürliche Zahlen mit Addition bilden eine Gruppe, Rotation von geometrischen Figuren ist ein anderes Beispiel.

3.1.1 Definition Algebra

Eine Algebra – aus einer Sichtweise, die sich aus den Anforderungen der Untersuchung von Programmierung ergibt - besteht aus

- einem Träger (manchmal Sorte genannt) – einer Menge von unterscheidbaren Elementen;
- Operationen, die Elemente aus dieser Menge verknüpfen;
- Axiomen, die Ergebnisse aus solchen Verknüpfungen beschreiben.

Die Algebra der natürlichen Zahlen (oben 1) ist ein Beispiel dafür. Träger sind die Zahlen (z.B. in der gebräuchlichen Notation), die Operationen sind +, -, * und die Axiome sind die oben angegebenen.

Dieses Konzept wurde von Birkhoff (1945) verallgemeinert, indem mehrere Träger und allgemeine Operationen zugelassen werden. Diese Idee ist bereits in der Vektoralgebra angelegt, bei der Vektoren mit einer Addition (nach Regeln (1)) mit dem Feld der reellen Zahlen (mit den Regeln (2)) durch eine neue assoziative äußere Verknüpfung, skalare Multiplikation (.) genannt, verbunden werden:

n . (v + w) = n . v + n . w wo n eine reele Zahl und v, w Vektoren sind
1 . v = v

Es ist nützlich, universale Algebren typisiert darzustellen (eine Verallgemeinerung der Typen Theorie von Russell (1903)). Dabei werden die Träger als Typen angesehen und die Operationen nur zwischen Elementen bestimmter Typen erklärt; dies wird in der Signatur der Operation festgelegt (Cardelli 1997).

Universale Algebren erfassen das Wesentliche an den Operationen, die zu einer Klasse von Objekten gehören; die gleiche Algebra, d.h. die gleichen Regeln für Operationen, werden in den verschiedensten Situationen angetroffen. Die Allgemeinheit wird betont und Regelsysteme unabhängig von bestimmten Anwendungen untersucht. Moderne Algebra leistet dies (MacLane and Birkhoff 1967) und erreicht dabei sogar noch eine weitere Verallgemeinerung zu Kategorien (Barr and Wells 1990, Asperti and Longo 1991, Pierce 1993) oder Modelltheorie (Hodges 1997).

Reiter hat kürzlich gezeigt, wie mittels komplexer Funktionen – realisiert als Prolog Programme – Operationen, die Zustände ändern, auch in ein Logik-basiertes System eingebracht werden können (Reiter in preparation); dieser Beitrag kann auch als Erweiterung der Logik um algebraische Elemente, d.h. Operationen, die Zustände verändern, gesehen werden.

Die theoretische Analyse von Programmen, die Situationen der realen Welt beschreiben, und von Programmierung im allgemeinen mit Logik führen zu unübersichtlichen Beschreibungen mit Vorbedingungen und Konsequenzen für Operationen (Wirth 1975). Auf algebraischer Grundlage wurde die Theorie der abstrakten Datentypen und algebraischer Spezifikationen aufgebaut (Goguen 1975, Goguen *et al*. 1975), die zur Beschreibung von Semantik geeignet sind (Frank and Kuhn 1995).

3.2 Spiele als Algebra

Ein Spiel wie das Damespiel besteht aus zwei Spielern, einem Brett, das als Menge von Positionen aufgefaßt werden kann, und aus Steinen. Ein Spiel geht durch eine Reihe von Zuständen des Brettes, bis es zu Ende ist und einer der Spieler gewonnen hat. Das lässt sich als Algebra mit den Trägern (Sorten) beschreiben:

- Brett, das aus 8 * 8 Positionen besteht, an denen Spielsteine liegen können;
- Spielsteine haben die Farben Schwarz oder Weiß und die Werte Bauer oder Dame;
- 2 Spieler (Schwarz, Weiß).

Die Signaturen der wichtigsten Operationen sind:

```
initialisieren:: brett
zug :: spieler x position x position x brett -> brett
ist_gültig :: spieler x position x position x brett -> Bool
ist_zuEnde :: brett -> Bool
hat_gewonnen :: brett -> Spieler
```

Die Beschreibung als Algebra sagt, dass Dame gespielt wird, indem zuerst das Brett initialisiert wird und dann die Spieler ziehen. Es gibt Tests, um zu sehen ob ein Zug gültig ist, ob das Spiel zu Ende ist (weil ein Spieler nicht mehr ziehen kann) und welcher Spieler ein beendetes Spiel gewonnen hat. Zu den angeführten Signaturen der Algebra gehören Axiome, welche die Details der Spielregeln beschreiben. Diese Regeln können z.B. in der formalen Notation der funktionalen Programmiersprache Haskell (Peterson *et al.* 1996, Bird 1998, Hudak 2000) angegeben werden.

Eine solche Algebra beschreibt alle möglichen Damepartien nach den gegebenen Regeln und erlaubt, für jede Sequenz von Zügen, zu entscheiden, ob diese ein legales Damespiel beschreibt, das die Regeln einhält, oder nicht. Die Algebra, mit der Operation *hat_gewonnen* bestimmt auch das Ergebnis der Partie. Die Algebra gibt hingegen nicht an, wie ein Spiel gewonnen wird, sie beschreibt keine Strategie für einen Spieler und kann auch nicht direkt dazu verwendet werden, um für eine Spielsituation den günstigsten nächsten Zug zu finden.

4 Was ist ein Spiel?

Mit diesem formalen Apparat können wir bereits verschiedene Bedeutungen des Begriffes ‚Spiel' analysieren und finden drei Bedeutungen (das Wort ‚Spiel' als Homonym):

- Spiel als Regelwerk mit dem ein Gewinner festgestellt werden kann,
- eine bestimmte Realisierung eines Spieles,
- eine Spielsequenz losgelöst von einer Realisierung.

4.1 Spiel als Regelwerk

Ein Spiel im allgemeinen besteht aus dem abstrakten Regelwerk, so wie wir es oben als Algebra formuliert haben. In gleicher Form können die Regeln für andere Brettspiele, wie z.B. Schachspiel, etc., beschrieben werden, aber auch die Regeln für das Fußballspiel. Ein extremer Fall sind die Regeln für simulierte Fußballspiele von virtuellen Agenten, die in Wettbewerben gegeneinander antreten (um die Fähigkeiten der Ersteller der Agenten-Programme zu testen); hier sind die Regeln verbal beschrieben und dann auch formal gegeben durch das Programm, das deren Einhaltung prüft. Die Spieler sind Agentenprogramme, die Züge aufgrund der Spielsituation, wie sie sie erfassen, ausführen. Ein Spiel kann durch Visualisierungsroutinen als ‚Fußballspiel' sichtbar gemacht werden (Robocup).

Die Regeln bestimmen alle möglichen regelkonformen (legalen) Spiele. Für jede legale Sequenz von Zügen kann ermittelt werden, wer das (deterministische) Spiel gewinnt.

4.2 Eine bestimmte Realisierung eines Spieles

Die Damepartie, die ich gestern abend mit meiner Freundin gespielt habe, ist eine Sequenz von Bewegungen von Holz-Damesteinen, die wir auf dem Brett im Wohnzimmer ausgeführt haben. In diesem Kontext galten die Holz-Scheibchen als Damesteine (und zwar die dunklen als ‚schwarz' und die helleren als ‚weiß' im Sinne des Damespieles – auch wenn die wirklichen Farben eher beige und dunkelbraun waren) auf einem Brett, mit dunklen und hellen Feldern,

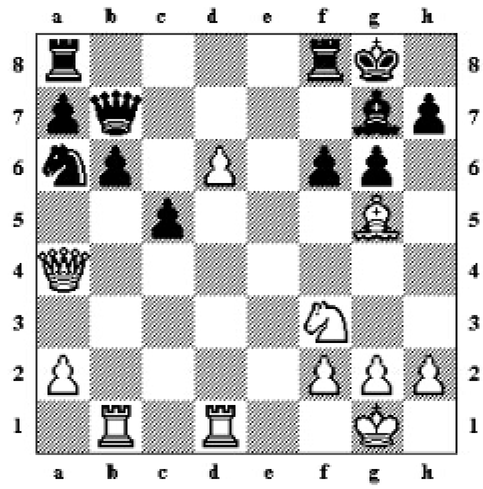
4.3 Spielsequenz losgelöst von einer Realisierung

Eine bestimmte Realisierung kann beschrieben werden, so dass die gleiche Sequenz von Zügen immer wieder ‚gespielt' (instantiert) werden kann. Natürlich wird die gleiche Sequenz – für den hier interessierenden Typ deterministischer Brettspiele – immer wieder den gleichen Ausgang haben. Schachpartien, zum Beispiel, werden in der Zeitung publiziert, diskutiert und nachgespielt; sie haben eine Identität unabhängig von der Realisierung mit bestimmten Steinen auf einem bestimmten Brett zu einem bestimmten Zeitpunkt – sie ‚existieren' abstrakt, zeit- und materielos; meist wird für eine Spielsequenz ein Name gewählt, der an die Personen oder den Ort ihrer ersten Instantierung erinnert (Abbildung 1).

Schwarz: Pribyl Josef (2395)

EU-chT Skara (5), 1980, [D85]

1.d4 Sf6 2.c4 g6 3.Sc3 d5 4.cxd5 Sxd5 5.e4 Sxc3 6.bxc3 Lg7 7.Sf3 b6 8.Lb5+ c6 9.Lc4 0–0 10.0–0 La6 11.Lxa6 Sxa6 12.Da4 Dc8 13.Lg5 Db7 14.Tfe1 e6 15.Tab1 c5 16.d5 Lxc3 17.Ted1 exd5 18.exd5 Lg7 19.d6 f6



20.d7 fxg5 21.Dc4+ Kh8 22.Sxg5 Lf6 23.Se6 Sc7 24.Sxf8 Txf8 25.Td6 Le7 26.d8D Lxd8 27.Dc3+ Kg8 28.Td7 Lf6 29.Dc4+ Kh8 30.Df4 Da6 31.Dh6 1–0

Abb. 1.

Für das Schachspiel ist eine formale Notation von Partien sehr gebräuchlich. Es werden die Züge der zwei Spieler aufgelistet, wobei jeweils der Typ des Spielsteines (Bauer, Läufer, König) und die Position am Anfang und am Schluss des Zuges angegeben wird. Auch für das Damespiel lässt sich eine Notation analog angeben, wobei die genaue Art der Notation nicht wichtig ist. Spielsequenzen können aber auch in natürlicher Sprache beschrieben werden, was z.B. bei Fußball die gebräuchliche Form ist.

5 Was haben die drei verschiedenen Verwendungen des Begriffes Spiel gemeinsam?

Der allgemeine Ausdruck ‚Damespiel' beschreibt eine unendliche (oder zumindest sehr große Zahl) von Spielsequenzen, die nach diesen Regeln gespielt werden können; die Algebra beschreibt alle diese realisierbaren Spiele und grenzt sie gegen alle illegalen Sequenzen von Zügen ab, die nicht als Damespiele gelten. Es ist möglich, automatisch alle Spielsequenzen zu generieren und aufzulisten.

Ein bestimmtes Damespiel ist eine bestimmte Sequenz von Zügen, die zu einem bestimmten Gewinner des Spieles führt; die gleiche Sequenz führt immer zum gleichen Gewinner. Eine solche Sequenz kann auf verschiedene Art realisiert werden:

- durch physische Bewegung von Steinen auf einem Brett
- durch die Beschreibung von Zügen in natürlicher Sprache
- durch eine formalisierte Beschreibung der Züge

Die verschiedenen Realisierungen sind gleichwertig, in jeder kann geprüft werden, ob dies ein legales Damespiel ist und welcher Spieler gewinnt. Es besteht eine Abbildung zwischen je zwei dieser Realisierungen, so dass eine Spielsituation in der einen in eine äquivalente Spielsituation in der anderen Realisierung abgebildet wird und ein Zug in der einen Beschreibung in einen Zug in der andern. Diese Abbildung muss die ‚Struktur' (d.h. den Wittgensteinschen ‚Witz') des Spieles erhalten.

Abbildungen, welche die Struktur erhalten, werden auch als Morphismen, insbesondere Homo- und Isomorphismen, bezeichnet (der Unterschied spielt auf der Ebene von Formalität, die hier gewählt wird, keine Rolle). Es muss gelten, dass eine Funktion (der Test, welcher Spieler gewonnen hat) in einer Situation (formalisierte Beschreibung der Züge) oder die korrespondierende Funktion auf die in eine andere Realisierung transformierte Situation angewendet, das korrespondierende Ergebnis liefert. Formal:

f (nachspielen (Züge)) = spielen (f (Züge))

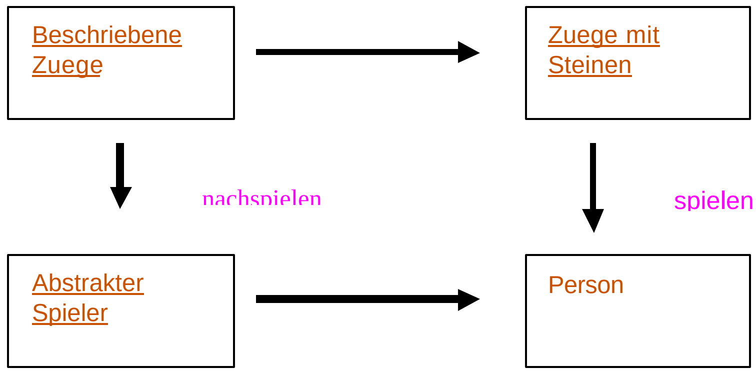


Abb. 2: ...

6 Abbildung von abstraktem Spiel auf physisches Spiel am Brett

Ein physisches Spiel am Brett ist homomorph zu einem abstrakten Spiel; man kann sagen, dieses Spiel sei eine Instantierung des abstrakten Spieles. Zu einem abstrakten Spiel gibt es viele verschiedene Instantierungen, denn zwei Instantierungen sind schon verschieden, wenn ich nicht den gl eichen physischen Stein von meinen 12 Steinen, die ich zur Auswahl habe, benutze um ein bestimmtes Feld zu besetzen. Damit lässt sich auch Wittgensteins Frage nach dem ‚Witz' des Spieles und dem Verhältnis zu zusätzlichen Regeln, wie diejenige über die Mar kierung von Damen durch zwei Steine, erklären:

Die Regeln für das Spielen von Dame mit physischen Steinen braucht einige zusätzliche Operationen, z.B. eine Operation, die auf einen einfachen Stein einen zweiten legt und damit eine Markierung für eine Dame schafft.

```
dame_machen:: stein x position x brett -> brett
```

Diese Operation muss genau dann angewendet werden, wenn durch die vorangehende Bewegung eine Dame entsteht; die Regeln, welche die Legalität von Zügen bestimmten, kontrollieren dies.

Es ergibt sich damit eine Abbildung von einem realen Brett mit Steinen, die je eine Individualität haben, auf ein abstraktes Brett; einfache Steine werden auf Bauern, doppelte Steine auf Damen abgebildet; meine Freundin und ich werden auf die beiden abstrakten Spieler ‚Weiß' und ‚Schwarz' abgebildet. Es ist leicht zu zeigen, dass diese Abbildung die Struktur erhält: Gewinner des abstrakten Spieles und des realen Spieles korrespondieren.

Wittgenstein weist also richtig darauf hin, dass der Witz des Spieles die Algebra des abstrakten Spieles ist. Die zusätzliche Regel, wie die Figuren dargestellt werden, gehört nicht zum Kern, sondern nur zur physischen Realisierung. Mittels des Formalismus kann dies nachvollzogen werden.

7 Natürliche Sprache zur Beschreibung eines Spieles

Die Beschreibung eines bestimmten Spielverlaufes in einer natürlichen Sprache ist möglich. Wenn die Beschreibung ausreichend ist, so kann das Spiel nachgespielt werden. Die Übersetzung in eine Sequenz von Zügen oder auch in eine formalisierte Sprache ist im Prinzip und für einen Menschen möglich und gibt bei ‚guten' Beschreibungen keinen Anlass zu Missverständnissen.

Die natürlich-sprachlichen Begriffe erhalten im Rahmen eines Spieles eine besondere Bedeutung, wie auch reale Sachverhalte eine besondere Bedeutung erlangen. Wittgenstein macht darauf aufmerksam, dass die Erklärung „das ist der König" (Wittgenstein 1960, 31, p. 305) nur verständlich ist, wenn die Regeln des Schachspieles bekannt sind. Die Begriffe des Spieles haben nur innerhalb des Kontextes des Spieles einen Sinn. Im Spiel erhalten bestimmte Sachverhalte eine bestimmte Bedeutung (z.B. die doppelten Steine gelten als Damen). John Searle hat dafür die Formel „x gilt als y im Kontext z" geprägt (Searle 1995), die sich hervorragend für Spiele anwenden lässt.

Sogar ein mentales Spielen im Kopf ist eine mögliche Form eines Spieles und isomorph zu einer Beschreibung eines Spieles in einer natürlichen oder formalen Sprache. Wenn ich real mit einem Partner spiele, stelle ich mir mögliche Sequenzen von Zügen vor und beurteile das Ergebnis; wenn ich die Sequenz nachher auf dem Brett nachziehe, kann ich höchstens sehen, wo ich ‚einen Fehler' gemacht (gedacht) habe. Allerdings muss ich mir die Züge beider Spieler vorstellen und wenn der Gegner nachher einen anderen Zug wählt, als ich angenommen habe, bin ich überrascht und es entsteht eine andere Sequenz.

Nicht alle Beschreibungen eines Damespieles in einer natürlichen Sprache enthalten alle notwendige Information, um die Partie nachspielen zu können. Manche Beschreibungen werden mehr Details enthalten, als dafür notwendig sind. Das formale Konzept ‚Damespiel' wählt aus der Komplexität der Welt eine genau bestimmte kleine Zahl von relevanten Details aus, die das Spiel ausmachen. Diese und nur diese machen ein Damespiel losgelöst von einer bestimmten Realisierung aus und aus der Perspektive des Damespiels sind alle Instantierungen, mit den gleichen Eigenschaften für diese Details – d.h. die Züge – äquivalent (technisch: isomorph).

8 Spiel und soziale Realität

John Searle (1995) hat darauf hingewiesen, dass viele Aspekte unseres Lebens sozial konstruiert sind (siehe auch (Berger and Luckmann 1996)). Spiele sind ganz offensichtlich soziale Konstruktionen, die wesentliche Aspekte des Lebens, besonders des Krieges, in einer abstrakten und formalen Form darstellen (Go, Schach, u.a.).

Auch andere Aspekte der sozialen Realität lassen sich mit den Konzepten darstellen, die wir hier am Beispiel von Spielen (insbesondere Brettspiele) entwickelt haben. Spiele sind, wie von Wittgenstein angeregt wurde, prototypische Situationen - zwei Aspekte der sozialen Realität.

8.1 Gesetz als Spiel

Die große Ähnlichkeit des Regelwerkes eines Spieles mit den staatlichen Gesetzen zeigt sich schon aus der Ähnlichkeit der Formulierungen. In beiden Fällen werden nur bestimmte Aspekte aus der komplexen Realität herausgegriffen und darüber Regeln aufgestellt. Im Unterschied zum Spiel, bei dem Vorgänge in einem künstlich hergestellten und abgegrenzten Modell beschrieben werden, regelt das Gesetz Handlungen der Realität. Searle hat für institutionelle Realität gezeigt, wie hier physische Dinge eine bestimmte Bedeutung im Kontext des Gesetzes erlangen; z.B. gilt eine bestimmte Form von bedrucktem Papier in Österreich als ‚Geld' – das ist nicht grundsätzlich verschieden von der Festlegung, dass zwei aufeinandergelegte Steine als Dame gelten. Das Gesetz legt dann fest, welche Regeln für Handlungen mit Geld gelten; z.B. tilgt das Übergeben von Geld Schulden – was vergleichbar ist mit den Regeln, welche Züge mit Damen ausführbar sind.

Wir haben ein reales österreichisches Gesetz mit über 100 Paragraphen in Algebren übersetzt, im wesentlichen dem Beispiel des Damespiels folgend (Navratil in progress). Daraus zeigt sich auch formal die Ähnlichkeit zwischen Gesetzen und Spielregeln.

Die meisten Begriffe in einem Gesetz sind in diesem oder einem andern Gesetz definiert; leider werden manchmal in verschiedenen Gesetzen die gleichen Begriffe mit unterschiedlicher Bedeutung verwendet, z.B. gibt es in Österreich mindestens fünf gesetzlich definierte Begriffe ‚Wald', für die unterschiedlichen Regeln gelten. Gesetze enthalten aber auch Verweise auf reale Sachverhalte, die nicht legal definiert sind: Person, Geburt, Tod, Land, die dann im Rahmen des Gesetzes eine bestimmte Bedeutung erhalten und durch bestimmte Handlungen verknüpft werden, denen ebenfalls eine bestimmte Bedeutung beigelegt wird (vgl. den Zügen im Spiel): Heiratszeremonie, die eine Ehe begründet, u.a.

8.2 Sprache als Spiel

Bei der Beschreibung eines Spieles gilt, dass die verbale (oder formalisierte) Beschreibung homomorph zu einem (oder vielen) realen Spielabläufen ist. Das lässt sich – Hinweisen von Wittgenstein folgend – auf andere sprachliche Beschreibungen verallgemeinern:

Zwischen den realen (physischen) Objekten und den Operationen damit und den sprachlichen Zeichen besteht ein Homomorphismus. Dies ist besonders einfach für die Namen von Dingen einzusehen: Wörter wie ‚Max', ‚Ludwig Wittgenstein', etc., stehen für bestimmte, physische Personen; andere Konstruktionen bestimmen Personen oder Gegenstände mittelbar: ‚meine Frau', ‚der Präsident der Vereinigten Staaten' und ‚meine Gabel (während dieser Mahlzeit)'. Es gilt aber auch für andere Wortarten und die Kategorien der Grammatik, und kognitive Linguisten schlagen vor, nicht mehr zwischen Grammatik und Vokabular zu unterscheiden (Langacker 1987).

Genau so, wie ein Spiel(partie) abstrakt beschrieben werden kann, das noch gar nie gespielt wurde, kann mit Sprache eine Realwelt-Situation beschrieben werden, die nicht oder noch nicht existiert. In diesem Sinne beschreibt oder schafft eine sprachliche Beschreibung eine Welt, ähnlich wie die Beschreibung eines Spieles dieses Spiel schafft. Die Regeln der realen, erlebten Welt – soweit bekannt – erlauben zu beurteilen, ob die Beschreibung legal ist, ob dies ein möglicher Ablauf ist, und erlauben oft Vorhersagen über das Ergebnis der Handlung. Mark Johnson hat übrigens gezeigt, dass die Konstruktion verschiedener möglicher Abläufe und die Beurteilung des Ergebnisses Voraussetzung jeder Diskussion über Ethik und Moral ist (Johnson 1993).

9 Zusammenfassung

Spiele sind eine sehr wesentliche kulturelle Leistung; in ihnen werden Abläufe des wirklichen Lebens (z.B. Krieg) in einer vereinfachten und schematischen Form modelliert und können gefahrlos ausprobiert werden. Wittgenstein hat unsere Aufmerksamkeit auf Spiele gelenkt, weil Wesentliches aus ihnen gelernt werden kann.

Mit den formalen Mitteln seiner Zeit konnten Wittgenstein Spiele nicht adäquat formal beschrieben. Wir sehen heute, dass Spiele als universale Algebren formalisiert werden können und dass das Konzept der ‚strukturerhaltenden Abbildung' (Iso- und Homomorphismus) zwischen verschiedenen Realisierungen fruchtbar ist. Die Beziehung zwischen einem Spiel wirklich auf einem Brett ausgeführt, meiner Vorstellung im Kopf eines Spielablaufes, der Beschreibung eines Spieles in natürlicher Sprache oder einer formalisierten Notation kann dann als Isomorphismus beschrieben werden, der immer wieder zeigt, welche Dinge im gegebenen Kontext als Elemente des Spieles gelten. Schon Kindern ist klar, dass man das gleiche Spiel mit sehr verschiedenen wirklichen Objekten spielen kann – das Wesentliche, der Witz, am Spiel sind die Regeln, die durch die Algebra beschrieben sind.

Diese Einsicht kann verallgemeinert werden: Gesetze regeln das wirkliche Leben ähnlich wie Spielregeln Spiele regeln; Spielregeln geben an, welche Aspekte eines wirklichen Handlungsablaufes relevant sind, welche als Handlungen des Spieles mit bestimmten Folgen gelten. Gesetze wählen in gleicher Art bestimmte Aspekte aus und schreiben ihnen bestimmte Bedeutung zu, die wiederum im Rahmen der Gesetze definiert sind. Searle hat dies als ‚soziale Realität' beschrieben und dafür die Formel „x gilt als y im Zusammenhang z" geprägt. In beiden Fällen, Spiel und Gesetz, stehen am Ursprung Sachverhalte und Handlungen der Wirklichkeit, auf denen diese Regelgebäude aufgestellt sind, von denen aber sofort abstrahiert und nur die Struktur (im Sinne der Algebra) diskutiert wird.

Danksagung

Gespräche mit Werner Kuhn, Martin Raubal und Max Egenhofer über algebraische Spezifikationen waren für mich wertvoll und die Kommentare von Barry Smith und Christine Rottenbacher zu einem draft dieser Arbeit nützlich. Die Unterstützung aus EU-Projekten (besonders Chorochronos und Revigis) und einem FWF-Projekt (Ontologie für Kataster) sei dankbar erwähnt. Nicht zuletzt die anregende Atmosphäre der klassischen Wiener Kaffeehäuser, besonders des Café Museum, indem Teile dieser Arbeit entstanden sind, hat ebenfalls beigetragen.

Referenzen

Asperti, A. and Longo, G., 1991, Categories, Types and Structures - An Introduction to Category Theory for the Working Computer Scientist (Cambridge, Mass.: The MIT Press).

Barr, M. and Wells, C., 1990, Category Theory for Computing Science (New York: Prentice Hall).

Berger, P. L. and Luckmann, T., 1996, The Social Construction of Reality (New York: Doubleday).

Bird, R., 1998, Introduction to Functional Programming Using Haskell (Hemel Hempstead, UK: Prentice Hall Europe).

Birkhoff, G., 1945, Universal Algebra. In Proceedings of the First Canadian Math. Congress, (Toronto University Press), pp. 310-326.

Cardelli, L., 1997, Type Systems. In Handbook of Computer Science and Engineering, edited by A. B. Tucker: CRC Press), 2208-2236.

Carnap, R., 1958, Introduction to Symbolic Logic and its Applications (New York: Dover Publications).

Ehrich, H.-D., Gogolla, M. and Lipeck, U. W., 1989, Algebraische Spezifikation abstrakter Datentypen (Stuttgart: B.G. Teubner).

Frank, A. U. and Kuhn, W., 1995, Specifying Open GIS with Functional Languages. In Advances in Spatial Databases (4th Int. Symposium on Large Spatial Databases, SSD'95, in Portland, USA), Lecture Notes in Computer Science, edited by M. J. Egenhofer and J. R. Herring: Springer-Verlag), 951, pp. 184-195.
Goguen, J. A., 1975, An Introduction to categories, algebraic theories and algebras.
Goguen, J. A., Thatcher, J. W., et al., 1975, Abstract Data Types as Initial Algebras and Correctness of Data Representations. In Proceedings of the Conf. on Computer Graphics, Pattern Recognition and Data Structures, May 1975, pp. 89-93.
Guttag, J. V., Horning J. J. and Wing, J. M., 1985, Larch in Five Easy Pieces. Report, Digital Equipment Corporation, Systems Research Center.
Hodges, W., 1997, A Shorter Model Theory (Cambridge, UK: Cambridge University Press).
Hudak, P., 2000, The Haskell School of Expression (Cambridge, UK: Cambridge University Press).
Johnson, M., 1993, Moral Imagination (Chicago: University of Chicago Press).
Langacker, R. W., 1987, Foundations of Cognitive Grammar (Stanford, CA.: Stanford University Press).
Loeckx, J., Ehrich, H.-D. and Wolf, M., 1996, Specification of Abstract Data Types (Chichester, UK and Stuttgart: John Wiley and B.G. Teubner).
MacLane, S. and Birkhoff, G., 1967, Algebra (New York: Macmillan).
McCarthy, J. and Hayes, P. J., 1969, Some Philosophical Problems from the Standpoint of Artificial Intelligence. In Machine Intelligence 4, edited by B. Meltzer and D. Michie (Edinburgh: Edinburgh University Press), 463-502.
Navratil, G., in progress, Formalisierung von Gesetzen, Ph.D., Technical University Vienna, Vienna.
Peterson, J., Hammond, K., et al., 1996, Report on the functional programming language Haskell, Version 1.3, http://www.haskell.org/definition/.
Pierce, B. C., 1993, Basic Category Theory for Computer Scientists (Cambridge, Mass.: MIT Press).
Reiter, R., in preparation, Knowledge in Action: Logical Foundations for Describing and Implementing Dynamical Systems (
Robocup, Robocup 2001, http://www.robocup.org.
Rosch, E., 1973, Natural categories. Cognitive Psychology, 4, 328-350.
Rosch, E., 1978, Principles of Categorization. In Cognition and Categorization, edited by E. Rosch and B. B. Lloyd (Hillsdale, NJ: Erlbaum).
Russell, B., 1903, Principles of Mathematics, Appendix B: The Doctrine of Types (Cambridge: Cambridge University Press).
Searle, J. R., 1995, The Construction of Social Reality (New York: The Free Press).
Tarski, A., 1995, Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences (Mineola, N.Y.: Dover Publications).
Whitehead, A., 1898, A Treatise on Universal Algebra (Cambridge: Cambridge University Press).
Whitehead, A. and Russell, B., 1910-1913, Principia Mathematica (Cambridge: Cambridge University Press).
Wirth, N., 1975, Systematisches Programmieren (Stuttgart: B.G. Teubner).
Wittgenstein, L., 1960, Tractatus logico-philosophicus, Tagebücher, Philosophische Untersuchungen (Frankfurt a. Main: Suhrkamp Verlag).